Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 5, pp. 703–713. Pergamon Press 1962. Printed in Great Britain.

PIONEER PAPERS IN CONVECTIVE MASS TRANSFER

4. H. THOMA: *Hochleistungskessel*, Springer, Berlin (1921). Reprinted by permission of Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Editor's Foreword

In his 1916 paper (Pioneer paper 2), Nusselt showed how mass transfer rates could be calculated from data obtained in heat transfer experiments. Five years later, H. Thoma published a book containing a full account of the reverse procedure. Thoma made measurements on the rate at which ammonia gas was absorbed from an air stream by strips of filter-paper soaked in concentrated phosphoric acid; the paper was wrapped around solid cylinders representing the super-heater tubes of a steam boiler.

Here we have re-printed the pages of Thoma's book which give the essential features of his theoretical approach and his experimental method. Readers may care to note that the allowance made by the author for the difference between the diffusion coefficient of ammonia and the thermal diffusivity of air would not nowadays be regarded as correct.

D.B.S.

III. BESTIMMUNG DER WÄRMEÜBERGANGSZAHLEN DURCH MODELLVERSUCHE

H. THOMA

1. *Die Analogie zwischen Diffusion und Wärmeübergang*

Die oben beschriebenen Modellversuche gestatten ferner auch eine unmittelbare und praktisch sehr bequeme Bestimmung von Wärmeübergangszahlen für beliebige Heizkörper und Geschwindigkeiten, und zwar mit Hilfe von zahlenmäßig durchgeführten Diffusionsversuchen. Diesem Verfahren liegen die nachfolgend gebrachten Beziehungen zugrunde:

Bezeichnet man mit

λ,	die Wärmeleitfähigkeit	der Heizgase,
c_p,	die spez. Wärme der Gewichtseinheit	der Heizgase,
v,	das spez. Volumen	der Heizgase,
w_x, w_y, w_z,	die Geschwindigkeitskomponenten nach den Raumkoordinaten x, y, z	der Heizgase,
κ,	die Diffusionskonstante	des diffundierenden Gases,
p,	der Partialdruck	des diffundierenden Gases,
x, y, z,	die Raumkoordinaten für den Wärmeübergangsversuch,	
ξ, η, φ,	die Raumkoordinaten für den Modellversuch,	
t,	die Zeitvariable für den Wärmeübergangsversuch,	
τ,	die Zeitvariable für den Modellversuch,	
ϑ,	die Temperatur,	

so gelten folgende Differentialgleichungen

1. für den Wärmeübergang:

$$\frac{c_p}{v}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + w_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + w_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w_z\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right).$$

2. für die Diffusion:

$$\frac{\partial p}{\partial\tau} + w_\xi\frac{\partial p}{\partial\xi} + w_\eta\frac{\partial p}{\partial v} + w_\phi\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}\right).$$

Beide Differentialgleichungen sind identisch, wenn $\kappa = (\lambda v/c_p)$ ist und außerdem die Geschwindigkeiten w unverändert bleiben. Man hat also vorerst dafür zu sorgen, daß beim Diffusionsversuch die Strömung unverändert so wie bei dem eigentlich zu erforschenden Wärmeübertragungsvorgang bleibt. Falls das Modell in kleinerem Maßstab als der ursprüngliche im Modell zu prüfende Heizkörper hergestellt wird, muß die Strömung zumindest geometrisch ähnlich der Strömung im Heizkörper verlaufen.

Dies ist der Fall, wenn die Reynoldsche Zahl $wd/v\eta$ sowohl für das Modell als auch für den Originalheizkörper den gleichen Wert hat. d bedeutet dabei eine beliebige geometrische Abmessung des Heizkörpers bzw. des Modells, beispielsweise etwa den Rohrdurchmesser, η die Gaszähigkeit. Bei gegebenem Größenverhältnis von Modell zum Originalheizkörper ist damit bestimmt, wievielmal größer als bei dem wirklichen Wärmeübergangsvorgang die beim Modellversuch zu wählenden Geschwindigkeiten sein müssen. Das hierdurch gegebene Vergrößerungsverhältnis für die Geschwindigkeiten beim Modellversuch wollen wir n nennen. Im übrigen sei auch noch darauf hingewiesen, daß n auch noch von etwaigen Änderungen des spezifischen Volumens v und der Zähigkeit η abhängt, wie dies etwa in Frage kommt, wenn man mit Modellversuchen, die bei Zimmertemperatur ausgeführt werden sollen, den Wärmeübergang bei hocherhitzten Heizgasen erforschen will.

Will man nun die beim Modellversuch auftretenden Geschwindigkeiten durch die am Heizkörper meßbaren ausdrücken, so muß man bedenken, daß erstens die Abmessungen n mal kleiner, und außerdem die Geschwindigkeiten n mal größer sind. Wenn man sich etwa vorstellt, daß bei dem vorliegenden Strömungsvorgang periodische Wirbel auftreten, so wird die Frequenz dieser Wirbel, welche beim Heizkörper und beim Modell geometrisch ähnlich sein müssen, bei dem $n$fach kleineren und dabei noch mit $n$fach größerer Geschwindigkeit umströmten Modell n^2mal so groß sein. Wenn demnach die Funktion $w = F(t)$ die Strömungsgeschwindigkeit beim Heizkörper darstellt, so wäre bei dem Modell $w = F(tn^2)$ die maßgebende Strömungsgleichung. Wird daher beim Modellversuch das $n$fache der Strömungsgeschwindigkeiten am Heizkörper w eingeführt, so kann man auch an Stelle der Zeitvariablen τ des Modellversuches tn^2 einsetzen. Danach läßt sich die Diffusionsgleichung schreiben:

$$n^2\frac{\partial p}{\partial t} + n^2 w_x \frac{\partial p}{\partial x} + n^2 w_y \frac{\partial p}{\partial y} + n^2 \frac{\partial p}{\partial z} = n^2\kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right).$$

Da sich der Faktor n^2 weghebt, sind die Differentialgleichungen für die Temperatur ϑ und den Partialdruck p identisch, und Wärmeübergang und Diffusionsvorgang sind einander in der Tat ähnlich, wenn erstens die obenerwähnte Reynoldsche Zahl $wd/v\eta$ für Heizkörper und Modell gleich ist, und zweitens die Diffusionskonstante der Bedingung $\kappa = (\lambda v/c_p)$ genügt.

Werden diese Bedingungen erfüllt, so fällt auch die durch das mathematisch nicht lösbare Integral dieser Differentialgleichungen bedingte zeitliche und räumliche Aufeinanderfolge von Temperatur beim Heizkörper ϑ und Partialdruck beim Diffusionsversuch p gleichartig aus, wenn nebenher noch die Grenzbedingungen für den Wärmeübergangsvorgang und den Diffusionsvorgang dieselben sind. Dies ist aber in der Regel leicht zu erreichen. Meist handelt es sich dabei um das Folgende:

1. Die zuströmenden Heizgase haben gleichmäßig eine Temperatur ϑ_1. Dementsprechend muß man auch das zum Diffusionsvorgang benutzte Gas gleichmäßig der Versuchsluft beimengen, so daß in der eintretenden Luft sein Partialdruck überall gleichmäßig einen gewissen Wert p_1 hat.
2. An den Oberflächen des Heizkörpers herrscht gleichmäßig eine Temperatur ϑ_2.

Letzteres ist nämlich der bei Dampfkesseln meist ins Auge zu fassende Fall. Der Temperaturabfall in den Wandungen der Heiz- oder Wasserrohre sowie an der wasserberührten Oberfläche derselben ist hier in der Regel verschwindend klein gegen den Temperatursprung an der feuerberührten Heizfläche. Einer derartigen Grenzbedingung wird beim Diffusionsversuch dadurch am besten Rechnung getragen, daß man für die chemische Reaktion an der Oberfläche der porösen und getränkten Modelloberflächen so heftig wirkende Agentien nimmt, daß hier das Diffusionsgas nahezu vollständig aus der Luft entfernt wird, und in der unmittelbaren Nähe der Oberfläche des Modells der Partialdruck des Diffusionsgases gleich Null wird. Wenn dies nicht ganz erreicht wird, und an den am stärksten durch den Diffusionsvorgang belasteten Oberflächen ein geringer Partialdruck erhalten bleibt, so wirkt er in ähnlicher Weise wie eine geringfügige Wärmestauung an den meist beanspruchten Heizflächen. Man könnte daher auch daran denken, den Einfluß dieser Erscheinung im Modellversuch zu erforschen. In vielen Fällen kann man hiervon absehen und den Partialdruck p_2 unmittelbar an der Heizfläche gleich Null setzen. An der Heizkörperoberfläche verschwindet dann das Diffusionsgas, eine Erscheinung, welche in Analogie steht mit der Volumenverminderung der an der Dampfkesseloberfläche abgekühlten Heizgase. Damit hierdurch die Strömung der Heizgase nicht merklich verändert werde, ist es notwendig, das Diffusionsgas in sehr starker Verdünnung den Heizgasen beizumischen. Dies ist praktisch unschwer zu erfüllen. Man erhält dann aus dem Modellversuch Wärmeübergangszahlen, welche für mäßige Temperaturdifferenzen gelten, bei welchen die Volumenverminderung der abgekühlten Heizgase zu vernachlässigen ist. Es ist klar, daß man aber auch unschwer die Erscheinungen bei großen Temperaturdifferenzen am Modellversuch erforschen könnte, wenn man das Diffusionsgas in bekannter und gleichförmiger Konzentration der Versuchsluft beimischt.

2. *Berechnung der Wärmeübergangszahl aus Modellversuchen*

Nachdem im vorhergehenden Absatz nachgewiesen wurde, daß zwischen Diffusion und Wärmeübergang bei entsprechender Wahl der Grenzbedingungen eine weitgehende Analogie, ja fast Identität besteht, weil ja die Differentialgleichungen für beide Vorgänge dieselben sind, ist es auch leicht möglich, an Hand der in großen Zügen oben beschriebenen Modellversuche sogar die Zahlenwerte für den Wärmeübergang mit nahezu beliebiger Genauigkeit zu berechnen bzw. zu messen. Führt man nämlich an Stelle der Temperatur ϑ der Heizgase deren Übertemperatur in bezug auf die Heizkörperoberfläche $\vartheta' = \vartheta - \vartheta_2$ ein, so gelten nach den obenstehenden Überlegungen für die Übertemperatur ϑ' und den Partialdruck des Diffusionsgases p die Grenzbedingungen:

1. In der zuströmenden Luft:
   für den Warmeübergang $\vartheta' = \vartheta_1'$,
   für den Diffusionsversuch $p = p_1$,
2. An der Heizkörperoberfläche:
   für den Wärmeübergang $\vartheta' = 0$,
   für den Diffusionsversuch $p = 0$.

Entsprechende Werte ϑ' und p müssen daher zu beliebiger Zeit und an allen Orten einander proportional sein; als Proportionalitätsfaktor für p erscheint der Quotient p_1/ϑ_1.

Die numerische Auswertung des Diffusionsversuches gelingt nun auf folgendem Wege. In hinreichend weiter Entfernung hinter dem Heizkörper wird man sich in der Strombahn eine Stelle denken können, in welcher die Temperatur $\vartheta = \vartheta_3$ und entsprechend beim Diffusionsversuch der Partialdruck $p = p_3$ wieder gleichförmige Werte angenommen haben. Bildet man für die Versuchsdauer τ das Zeitintegral

$$\int^{\tau} \frac{p_3 V}{RT}\, dt,$$

wobei V das in der Zeiteinheit den Heizkörper durchströmende Heizgasvolumen,
RT Gaskonstante und absolute Temperatur bedeuten,

so erkennt man leicht, daß der Wert dieses Integrals gleich der während des Diffusionsversuches aus dem Heizkörpermodell ausgestoßenen Gewichtsmenge des Diffusionsgases ist. Ähnlich ist der Zusammenhang zwischen p_1 und der eingeführten Gewichtsmenge.

Diese ein- und austretenden Gewichtsmengen sind, wie oben erklärt wurde, den beim Wärmeübergangsversuch feststellbaren Übertemperaturen ϑ_1' und ϑ_3' der Heizgase am Ein- und Austritt aus dem Heizkörper proportional. Also gilt die Beziehung

$$\frac{p_1 - p_3}{p_1} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_3'}{\vartheta_1'}.$$

Der Quotient $(\vartheta_1' - \vartheta_3'/\vartheta_1')$ hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung. Bei einem Dampfkessel ist er einfach gleich dem Wirkungsgrad des Kessels (abgesehen von den äußeren Verlusten durch Ausstrahlung usw.), bezogen auf das Temperaturniveau der Kesselwandungen. Gewöhnlich pflegt man den Wirkungsgrad schlechthin auf die Temperatur der zugeführten Verbrennungsluft zu beziehen und dann noch die Verluste in der Feuerung usw. mit zu berücksichtigen. Wir wollen daher die Größe $(\vartheta_1' - \vartheta_1'/\vartheta_1')$, welche die Wärmeeigenschaften der Heizfläche, losgelöst von den äußeren Umständen, kennzeichnet, mit „Gütegrad" benennen und ihr die Bezeichnung ϵ geben.

Aus ϵ kann man leicht die technisch gebräuchliche Wärmeübergangszahl α, welche auf Quadratmeter, Stunden und Celsiusgrade als Maßeinheit bezogen wird, berechnen. Es ist nämlich mit den oben gebrauchten Bezeichnungen[1]

$$\alpha = 3600 \, . \frac{w \cdot f \cdot c_p}{F \cdot v} \, . \log \text{nat} \left(\frac{1}{1-\epsilon}\right).$$

ϵ kann, wie aus obenstehender Gleichung zu ersehen ist, bei dem Diffusionsversuch durch Wägung oder chemische Bestimmung der von dem Modell aufgenommenen Gasmenge bestimmt werden; sein Wert ist einfach gleich dem Verhältnis der von dem Modell aufgenommenen Gasmenge zur gesamten, der eintretenden Frischluft beigemengten Gasmenge.

Mit Hilfe der aus einem Diffusionsversuche bestimmten Werte von ϵ kann daher ohne weiteres die Wärmeübergangszahl α bestimmt werden. Damit ist die schwierige Aufgabe der Bestimmung von Wärmeübergangszahlen auf sehr einfache Modellversuche zurückgeführt.

3. *Ähnlichkeitsbetrachtungen*

Werfen wir nochmals einen Rückblick auf die im vorhergehenden Absatz aufgestellte Differentialgleichung des Wärmeüberganges

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\lambda v}{c_p}\left\{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right\},$$

so sehen wir, daß der Wärmeübergang zunächst abhängt von den Strömungsgeschwindigkeiten w_x, w_y und w_z. Bei geometrisch ähnlichen Heizkörpern oder Heizkörpermodellen sind auch die Strömungen ähnlich, wenn die Reynoldsche Zahl $wd/v\eta$ unverändert bleibt (w = Luftgeschwindigkeit; d = Rohrdurchmesser; v = spez. Volumen; η = Zähigkeit der Heizgase).

Wenn die mechanische Strömung bei verschieden großen ähnlichen Heizkörpern ähnlich bleibt, so bleibt auch die Wärmeströmung ähnlich, wobei noch vorauszusetzen ist, daß die Grenzbedingungen für letztere unverändert bleiben. Formal wäre dies in genau derselben Art zu beweisen, wie oben für den Partialdruck p geschehen; man braucht nur für die zunächst noch unbestimmte Temperaturverteilung am kleineren Heizkörper (Heizkörpermodell) ϑ'' zu setzen. Dann ergibt sich, daß ϑ und ϑ'' einander proportional und fernerhin, daß diese Größen bei Gleichheit der Grenzbedingungen sogar numerisch gleich sein müssen. Damit wäre die Ähnlichkeit der Temperaturverteilung erwiesen.

Die in der Zeiteinheit übergehende Wärmemenge, der „Wärmestrom" Q, läßt sich nun folgendermaßen berechnen: Man bildet über die gesamte Heizfläche F das Oberflächenintegral

$$\int^F \overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial N}} \, dF.$$

N soll dabei die Flächennormale sein. ϑ ist bei der turbulenten oder wirbelnden Strömung nicht nur mit dem Ort, sondern auch mit der Zeit veränderlich. Unter $\bar{\vartheta}$ soll daher der über längere Zeiträume gebildete Mittelwert von ϑ verstanden werden. Gemäß der physikalischen Definition muß der Wert dieses Oberflächenintegrals gleich dem gesuchten Wärmestrom Q sein, weil ja an den Oberflächen wegen der Zähigkeit die mechanische Strömung ruht und daher durch Konvektion keine Wärme übertragen wird.

Es wäre demnach

$$Q = \int^F \lambda \overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial N}} \, dF.$$

Bei mechanisch und wärmetechnisch ähnlichen Strömungen kann man nun setzen:

$$\overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial N}} = C \frac{t_1 - t_2}{d}.$$

t_1 und t_2 sind dabei 2 beliebige Temperaturwerte, etwa Eintrittstemperatur der Heizgase und Temperatur der Rohrwandungen, d irgendeine Größenabmessung, etwa der Durchmesser der Heiz- oder Wasserrohre. Von dem zunächst unbekannten Proportionalitätsfaktor C kann man nur aussagen, daß er eine Funktion der Reynoldschen Zahl $wd/v\eta$ allein ist. Wir wollen für den über F genommenen Mittelwert von C $\varphi(wd/v\eta)$ schreiben und erhalten damit

$$Q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{d} \varphi\left(\frac{wd}{v\eta}\right) F.$$

[1] S. z. B. *Mitteilungen der Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungsanlagen* Heft 3, S. 10, Gleichung 4.

Da bei ähnlichen Heizkörpern F dem Quadrat des Rohrdurchmessers proportional ist, kann man (unter Weglassung eines in φ enthaltenen Proportionalitätsfaktors) auch schreiben:

$$Q = \lambda(t_1 - t_2)d \cdot \varphi\left(\frac{wd}{v\eta}\right).$$

Die stündlich auf den Quadratmeter Heizfläche bei der Temperaturdifferenz $t_1 - t_2$ übergehende Wärmemenge oder, kurz gesagt, die technisch gebräuchliche Wärmeübergangszahl α ergibt sich hieraus zu

$$\alpha = \frac{\lambda}{d}\,\varphi_1\left(\frac{wd}{v\eta}\right).$$

Die Funktionen φ und φ^1 unterscheiden sich hierbei nur durch einen konstanten Faktor. Danach ist die Wärmeübergangszahl dem Rohrdurchmesser d umgekehrt proportional, wenn man die Gleichheit der Reynoldschen Zahl voraussetzt.

Auf welche Temperaturen t_1 und t_2 die Wärmeübergangszahl α bezogen ist, bleibt gleichgültig, wenn nur in allen Fällen dieselben Temperaturen eingeführt werden. Man pflegt in der Technik eine Art mittlere Übertemperatur einzuführen, welche aus der Vorstellung entspringt, daß 1. alle Heizflächen wärmetechnisch gleichwertig wären, und daß 2. die von den Heizflächen abgegebene Wärmemenge sich sofort gleichmäßig über den Querschnitt der mechanischen Strombahn verteile. Diese Voraussetzungen führen dazu, daß die Übertemperatur, als Funktion der von den Heizgasen bestrichenen Heizfläche betrachtet, sich als Exponentialfunktion darstellt, und dementsprechend als „mittlere Temperatur" ein logarithmischer Mittelwert von Eintritts- und Austrittstemperaturen anzusetzen ist. Gemäß diesen stillschweigenden Voraussetzungen wurde auch schon oben der aus dem Diffusionsversuchen hergeleitete Wert der Wärmeübergangszahl α ermittelt.

Die früher gebrachten Strömungsbilder zeigen allerdings schon auf den ersten Blick, daß diese Vorstellung nicht zutrifft. Die Temperatur der Heizgase ist an den verschiedenen Punkten eines Normalquerschnittes zur mechanischen Strömungsrichtung sehr ungleichmäßig, und die Wärmeaufnahme der einzelnen Rohrreihen erweist sich tatsächlich als sehr verschiedenartig. Immerhin ist dies alles zunächst belanglos, wenn nur an Hand einer einheitlichen Vorschrift stets wieder in gleicher Weise gebildete Temperaturwerte in die für die Wärmeübergangszahl α geltende Gleichung oben eingeführt werden.

4. *Die Abhängigkeit des Wärmeüberganges von der Wärmeleitungskonstanten λ*

Wenn man die soeben abgeleiteten Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen ähnlichen, aber verschieden großen, verschieden temperierten oder verschieden schnell umströmten Heizkörpern zur rechnerischen Verfolgung wärmetechnischer Aufgaben beanspruchen will, so ist zu beachten, daß dies alles zunächst nur gilt, wenn die Strömung mechanisch und wärmetechnisch ähnlich bleibt. Die verglichenen Heizkörper müssen daher nicht nur geometrisch ähnlich sein, und die Heizgasgeschwindigkeiten w müssen nicht nur so gewählt werden, daß die Reynoldsche Zahl $wd/v\eta$ unverändert bleibt, sondern es muß außerdem auch die Wärmeleitungszahl λ den gleichen Wert beibehalten.

Nun ist es von besonderem Interesse, die Abhängigkeit des Wärmeüberganges von der Wärmeleitung λ zu erforschen. Bei höherer Lufttemperatur, etwa in hocherhitzten Heizgasen, ist die Wärmeleitung λ nämlich beträchtlich größer.

In sehr einfacher Weise läßt sich diese Abhängigkeit ermitteln, indem man Diffusionsversuche mit verschiedenen Gasen anstellt, bei welchen die Diffusionskonstante κ verschiedene Werte hat. Auf diesem Wege kann man in streng richtiger Weise die Werte der Funktion $\varphi(wd/v\eta)$ nicht nur für alle gewünschten Werte von Geschwindigkeit, Zähigkeit und Größenausmaßen des Heizkörpers, sondern auch für verschiedene, durch die Diffusionskonstanten dargestellte Werte der Wärmeleitzahl λ ermitteln.

Sowohl die gaskinetischen Theorien, als auch Versuchsresultate zeigen, daß der Koeffizient in der Differentialgleichung des Wärmeüberganges $\lambda v/c_p$ sich mit der Temperatur ebenso stark ändert, wie die Diffusionskonstante κ. Durch Diffusionsversuche, welche bei höherer Lufttemperatur angestellt werden, läßt sich daher gleichfalls der Einfluß von λ feststellen. Der angegebene Weg der Verwendung verschiedener Diffusionsgase führt aber schon mit den bei Zimmertemperatur viel bequemer auszuführenden Versuchen zu dem gleichen Ziele.

Da, wie bemerkt, die Funktion φ auch von λ abhängt, ist eine rechnerische Feststellung des Einflusses der Wärmeleitungskonstanten λ auf die Wärmeübergangszahl α nicht möglich, wenigstens nicht mit Hilfe der vorangehenden Dimensionsbetrachtungen, welche uns keinen Einblick in den Mechanismus des Wärmeüberganges gestatten. Dagegen gelingt es mit Hilfe der Vorstellungen, welche wir an Hand der Strömungsbilder gewonnen haben, einiges hierüber auszusagen.

Wir hatten gesehen, daß die Oberflächen der Heizkörper mit verhältnismäßig dünnen Grenzschichten bedeckt sind, in welchen geringe, nahe der Wand gänzlich verschwindende Strömungsgeschwindigkeiten herrschen, während die Temperatur in der Grenzschicht nahe der Wand mit der Wandtemperatur übereinstimmt, um dann am Rand der Grenzschicht allmählich abzufallen (oder anzusteigen) auf die Temperatur der Heizgase, welche ziemlich gleichförmig ist, soweit sie nicht von den vorhergehenden Rohrreihen oder Heizflächen abgelöste Grenzschichtteile als sehr verschiedenartig gestaltete Wirbelgebilde mit sich führen. Der Wärmeübergang findet dabei in der Weise statt, daß immer neue Heizgasvolumina in die Grenzschichten eintreten, dort die Wandtemperatur annehmen, um später wieder in gleicher Menge als Wirbelfäden in das Innere des Flüssigkeitsstromes einzuwandern. Offenbar ist danach die ausgetauschte Wärmemenge proportional zu setzen dem ausgetauschten Volumen, der spez. Wärme und der Temperaturdifferenz $t_1 - t_2$ zwischen den Wandungen und dem Innern des Heizgasstromes. Die mechanischen Größen bleiben bei diesem Wärmeaustausch offenbar unverändert oder einander ähnlich, sofern die für die mechanische Strömung maßgebende Reynoldsche Zahl $wd/v\eta$ keine Änderung erfährt, und der Wärmeübergang ist einfach proportional der in der Volumeneinheit aufgespeicherten Wärmemenge $c_p/v\ (t_1 - t_2)$. Den Einfluß der Reynoldschen Zahl kann man ähnlich wie früher mit Hilfe einer Funktion $\varphi'(wd/v\eta)$ darstellen; φ' ist jetzt nicht mehr von λ abhängig zu denken. Für die in der Zeiteinheit ausgetauschte Volumenmenge V kann man schreiben:

$$V \sim d^2 w.$$

Bei unveränderter Reynoldscher Zahl ist aber $w = (v\eta/d)$; daraus ergibt sich für V:

$$V \sim dv\eta.$$

Damit erhält man für den Wärmestrom Q den Wert

$$Q = c_p d\eta(t_1 - t_2)\varphi'\left(\frac{wd}{v\eta}\right),$$

und für die Wärmeübergangszahl α:

$$\alpha = \frac{c_p\eta}{d}\varphi'\left(\frac{wd}{v\eta}\right).$$

Für die meisten Gase ist nun nahezu die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = c_p\eta$. Genauer hätte man mit einem Korrektionsfaktor r zu schreiben:

$$\lambda = r \cdot c_p\eta.$$

Die Werte von r sind wegen der Unsicherheiten, welche bei der experimentellen Bestimmung von λ obwalten, nicht genau bekannt. Angenähert ist etwa für 1-, 2-, 3- und 4-atomige Gase $r = 1{,}5,\ 1{,}25,\ 1{,}1,\ 0{,}93$; für Wasser bei 0°, 10°, 20° wird $r = 0{,}067,\ 0{,}10,\ 0{,}14$.

Man kann danach auch für α schreiben:

$$\alpha = \frac{\lambda}{rd}\varphi'\left(\frac{wd}{v\eta}\right).$$

Damit ist eine formelle Übereinstimmung mit der zunächst nur für unveränderliches λ geltenden Gleichung hergestellt. Sowohl gaskinetische Überlegungen, als auch alle mir bekannten Versuchsresultate zeigen, daß r in weiten Grenzen von der Temperatur und dem Druck unabhängig ist, so daß insgesamt die Wärmeübergangszahl der Wärmeleitfähigkeit λ proportional zu setzen ist. Die Funktion $\varphi'(wd/v\eta)$ ist demnach von λ unabhängig. Nur bei Übergang zu andern Gasarten sind die Korrekturwerte r zu beachten.

5. *Durchführung und Ergebnis der Modellversuche*

Der im vorhergehenden Absatz noch nicht ermittelte, also noch vorläufig unbekannte Wert der $\varphi'(wd/v\eta)$ kann nur durch Versuche erforscht werden, entweder Wärmeübergangsversuche, oder aber die viel einfacheren, bei entsprechenden Vorsichtsmaßregeln genau gleichwertigen Modellversuche. Um das Grundsätzliche derartiger Modellversuche zu erproben und gleichzeitig einige Ergebnisse über Rohrmaßen. Die Modelle wurden mit einer genau abgewogenen Menge Säure getränkt; nach dem Versuch konnte man dann in einfachster Weise durch Titrieren mit verdünnter Ammoniaklösung, unter Benutzung von Methylorange als Indikator, den Säurerest bestimmen. Durch Differenzbildung ergab sich hieraus die neutralisierte Säuremenge und mit einfacher Umrechnung die aufgenommene Ammoniakmenge. Das Verhältnis der letzteren zur gesam-

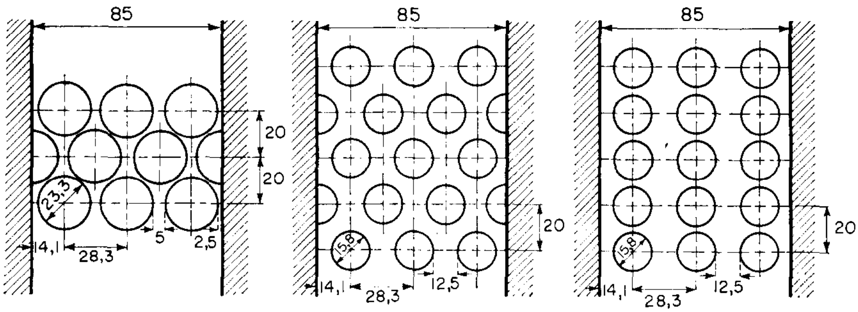

FIG. 18 bis 20. Heizkörpermodelle.

bündel, wie sie in Wasserrohrkesseln gebräuchlich sind, zu sammeln, habe ich mit den drei in Fig. 18 bis 20 dargestellten Filtrierpapiermodellen in dem Apparat nach Fig. 1 eine Reihe von Versuchen angestellt. Die Filtrierpapiermodelle wurden mit konz. Phosphorsäure (spez. Gewicht 1,7) getränkt und dann in den Apparat eingesetzt. Die Luftgeschwindigkeiten bzw. Luftmengen wurden, wie früher schon angegeben, durch den Druckabfall bestimmt, welcher nötig war, um die Luft durch die Meßdüse in Fig. 1 zu saugen. Als Diffusionsgas wurde Ammoniak benutzt. Zu diesem Zwecke wurde nach Entfernung des in Fig. 1 dargestellten Luftbefeuchters ein schleierartiges Gewebe mit einer in einem Analysengläschen genau abgewogenen Menge wässeriger Ammoniaklösung getränkt und dann in dem Einlauftrichter des Apparates quer zur Strömungsrichtung ausgebreitet und aufgehängt. Im Laufe eines etwa $\frac{1}{4}$ Stunde beanspruchenden Versuches wurde dann der im Schleier enthaltene Ammoniak langsam verdunstet und so mit der Luft durch das Modell hindurchgesogen.

Die Bestimmung der vom Modell aufgenommenen Ammoniakmenge geschah folgenderten eingeführten Ammoniakdosis ist dann der Gütegrad ϵ, aus welchem die Wärmeübergangszahlen α berechnet sind, mit der Voraussetzung, daß die Diffusionskonstante κ gleich der bezogenen Wärmeleitfähigkeit $\lambda v/c_p$ ist. Das letztere müssen wir noch rechnerisch nachprüfen.

Für Luft von 0° und 760 mm Barometerstand ist:

$$\lambda = 0{,}527 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Cal/m/s};\ c_p = 0{,}24\ \mathrm{Cal/kg};$$
$$v = 0{,}775\ \mathrm{m^3/kg},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\lambda v}{c_p} = 0{,}17\ \mathrm{cm^2/s}.$$

Für Ammoniak liegen leider zur Zeit keine unmittelbaren Messungen der Diffusionskonstanten κ vor. Nach gaskinetischen Methoden läßt sich dieser Diffusionskoeffizient berechnen aus den bekannten Werten der Gaszähigkeit und daraus abgeleiteten Größen.

Nach Jaeger[1] ist, wenn das diffundierende Gas

[1] *Handwörterbuch der Naturwissenschaften* V, S. 770.

Zahlentafel. Diffusionsversuche mit Heizkörpermodellen

Versuch Nr.	Luft-geschwindigkeit	Ammoniakmenge gesamte g	Ammoniakmenge absorbierte g	Gütegrad v.H.	Wärmeübergangs-zahl cal/m²Std°C
		A. Sturtevant-Heizkörper (Fig. 18).			
1	11,68	4,18	1,06	25,3	99
2	13,35	7,46	1,77	23,7	105
3	10,45	6,39	1,66	26,0	91
4	7,35	7,36	2,14	29,1	72
		B. Wasserrohrkessel, versetzte Rohrreihen (Fig. 19).			
5	5,07	5,14	1,39	27,0	101
6	4,70	10,20	2,84	27,8	97
7	6,86	7,32	1,76	24,1	120
8	7,38	8,09	1,89	23,4	125
9	7,80	10,24	2,15	21,0	129
		C. Wasserrohrkessel, gerade Rohrreihen (Fig. 20).			
10	5,32	5,02	1,16	23,2	89
11	5,15	12,02	2,79	23,2	86,3
12	7,37	7,07	1,45	20,5	107,5
13	7,80	8,12	1,63	20,1	111

in sehr starker Verdünnung angewendet wird, was ja bei den Versuchen der Fall war, der Diffusionskoeffizient κ angenähert:

$$\kappa = \tfrac{1}{3} l c.$$

l ist die mittlere Weglänge des Ammoniakmoleküles und zu $0{,}71 \cdot 10^{-5}$ cm ermittelt; c ist dessen mittlere Geschwindigkeit und beträgt 579 m/s $= 0{,}579 \cdot 10^{-5}$ cm/s. Daraus erhält man für κ:

$$\kappa = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}71 \cdot 0{,}579 = 0{,}137 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

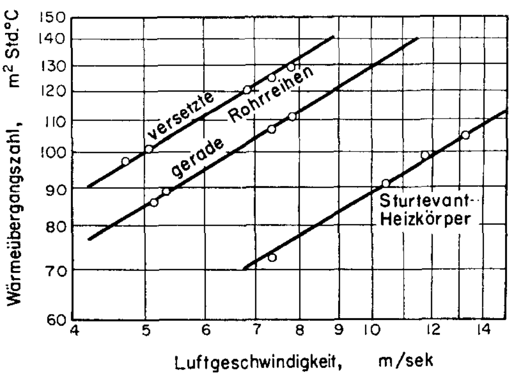

FIG. 21. Wärmeübergangszahlen nach den Modellversuchen.

Für die Konstante der Wärmeleitungsgleichung hatten wir oben den Wert $(\lambda v/c_p) = 0{,}17$ cm²/s gefunden. Danach hätte man also die Ergebnisse der Diffusionsversuche mit dem Faktor 0,17/0,137 = rd. 1,25 zu multiplizieren, um die Wärmeübergangszahl zu ermitteln.

Die Ergebnisse der Versuche sind in der folgenden Zahlentafel zusammengetragen und die errechneten Werte der Wärmeübergangszahl im Diagramm Fig. 21 aufgetragen, und zwar unter Benutzung logarithmischer Maßstäbe. Man sieht, daß in diesem Diagramm die einzelnen Versuchspunkte mit genügender Näherung auf einer mit dem Neigungswinkel tang α etwa = 0,6 gezogenen Geraden liegen. Damit wird die auch schon von anderer Seite gemachte Erfahrung bestätigt, daß unsere Funktion $\varphi(wd/v\eta)$ sich darstellen läßt als:

$$\varphi\left(\frac{wd}{v\eta}\right) = C\left(\frac{wd}{v\eta}\right)^n.$$

Ausnehmen muß man von dieser einfachen Regel nur solche Bereiche, wo plötzliche Änderungen des Strömungsbildes auftreten, z. B. bei dem Übergang von laminarer zu turbulenter Strömungsform, was aber in den technisch in Betracht zu ziehenden Fällen meist nicht vorkommt.

Der Exponent n hat dabei erfahrungsgemäß Werte zwischen 0,5 und 0,8; über den Beiwert C kann allgemein zunächst nichts ausgesagt werden.

Das hier geprüfte Modell Fig. 18 ist ein geometrisch ähnliches Abbild eines Sturtevant-Heizkörpers, mit welchem Rietschel die bereits oben erwähnten sehr ausführlichen Versuche

$$\alpha = 43{,}5\,\frac{w^{0,6}}{d^{0,4}}\ \text{cal/m}^2\text{Std. °C}$$

(w Luftgeschwindigkeit in m/s, d äußerer Rohrdurchmesser in cm), für geradlinig angeordnete Rohrreihen nach Fig. 20:

$$\alpha = 36{,}5\,\frac{w^{0,6}}{d^{0,4}}\ \text{cal/m}^2\text{Std. °C.}$$

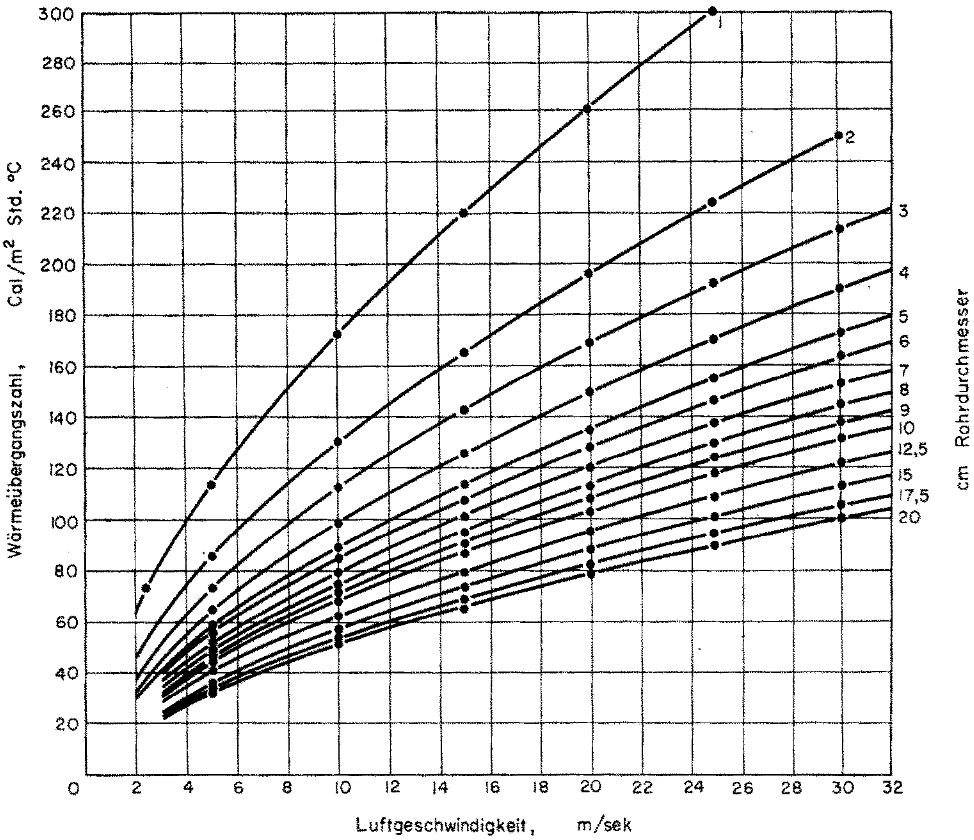

FIG. 22. Wärmeübergangszahlen für Wasserrohrkessel mit versetzten Rohrreihen, bei 0°C.

angestellt hat. Der Exponent n zeigt, wie zu erwarten war, gute Übereinstimmung mit Rietschels Wert $n = 0{,}59$; auch der Beiwert C ist anscheinend bis auf wenige Prozente richtig ermittelt.

In allgemeinerer Form und für verschiedene Rohrdurchmesser lauten danach die Gleichungen der Wärmeübergangzahlen für Wasserrohrkessel mit versetzten Rohrreihen nach Fig. 19:

Danach habe ich die Diagrammblätter Fig. 22 und 23 aufgezeichnet, aus welchen die Wärmeübergangszahlen für verschiedene Rohrdurchmesser und Geschwindigkeiten und zwar für Luft bei 0° und 760 mm Barometerstand zu entnehmen sind.

Ferner sind in Fig. 24 aufgetragen die Werte von $\lambda(1/v\eta)$; für Luft von 0° bis 1000°C; anstatt des wenig genau bekannten λ sind gemäß

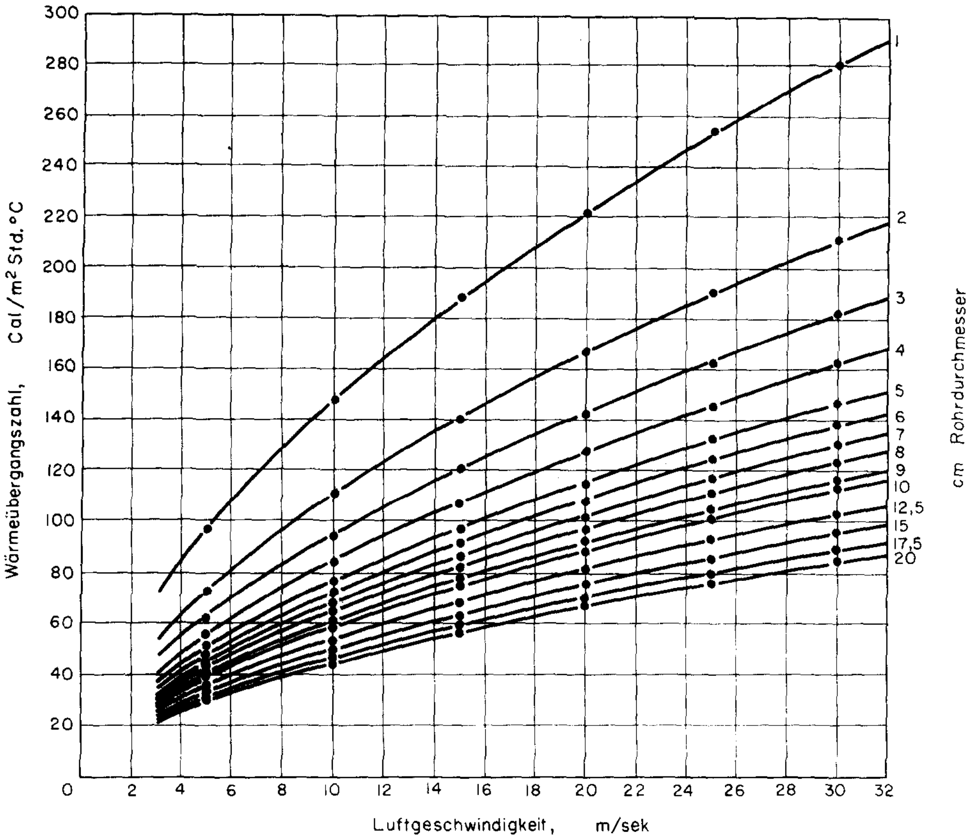

FIG. 23. Wärmeübergangszahlen für Wasserrohrkessel mit geradlinigen Rohrreihen, bei 0°C.

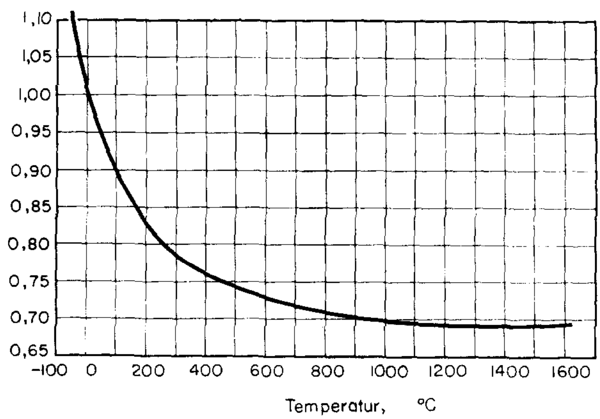

FIG. 24. Korrektionskurve für verschiedene Heizgastemperaturen aus den Kurven Fig. 22 und 23.

S. 46 die Werte $c_p \cdot \eta$ eingesetzt. Der Maßstab ist so gewählt, daß man als Ordinate unmittelbar die Berichtigungsfaktoren entnehmen kann, mit welchen die aus den Kurven Fig. 22 oder 23 entnommenen Werte der Wärmeleitungszahlen zu multiplizieren sind, um bei gegebener Lufttemperatur die tatsächlich zu erwartenden Wärmeleitzahlen zu erhalten.